

**ΜΑΘΗΜΑ 23****1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ****Συνέχεια του μαθήματος 22****Ασκήσεις****ΑΣΚΗΣΕΙΣ****3<sup>η</sup> ενότητα****17.**

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

α) Είναι συνεχής

β)  $3xf^2(x) + 2f(x) = x^2 + x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

i) Η  $f$  δεν έχει ρίζες

ii)  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Προτεινόμενη λύση**

i)

Έστω ότι η  $f$  έχει ρίζα  $\rho$ , τότε  $f(\rho) = 0$

Η υπόθεση (β), για  $x = \rho \Rightarrow 3\rho f^2(\rho) + 2f(\rho) = \rho^2 + \rho + 1$

$$0 = \rho^2 + \rho + 1 \text{ άτοπο, αφού}$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

ii)

Η  $f$  λοιπόν είναι συνεχής στο διάστημα  $(-\infty, +\infty)$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Η υπόθεση (β), για  $x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 \cdot f^2(0) + 2f(0) = 0^2 + 0 + 1$

$$2f(0) = 1$$

$$f(0) = \frac{1}{2} > 0$$

Άρα το σταθερό πρόσημο είναι (+), δηλαδή  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**18.**

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

α) Είναι συνεχής

β)  $f(a) > 0$  για κάποιο  $a \in \mathbb{R}$

γ)  $f^2(x) = x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**Προτεινόμενη λύση**

$$f^2(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{ή} \quad f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Για να επιλέξουμε χρειαζόμαστε το πρόσημο της  $f$ , το οποίο εξαρτάται από τις ρίζες της, εφόσον βέβαια υπάρχουν.

$$\text{Ρίζες της } f: \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \text{ αδύνατη.}$$

Άρα η  $f$  δεν έχει ρίζες.

Η  $f$ , λοιπόν, είναι συνεχής στο διάστημα  $(-\infty, +\infty)$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο (θετικό για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ή αρνητικό για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ). Επειδή, όμως,  $f(a) > 0$ , το πρόσημο της  $f$  θα είναι θετικό.

$$(1) \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**19.**

Δίνεται συνάρτηση  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

- i) Είναι συνεχής
- ii)  $f(a) < 0$  για κάποιο  $a \in (-2, 2)$
- iii)  $f^2(x) = 4 - x^2$ , για κάθε  $x \in [-2, 2]$

Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**Προτεινόμενη λύση**

$$f^2(x) = 4 - x^2 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{4 - x^2} \text{ ή } f(x) = -\sqrt{4 - x^2} \text{ για κάθε } x \in [-2, 2] \quad (1)$$

Για να επιλέξουμε, από τις ισότητες της (1), χρειαζόμαστε το πρόσημο της  $f$ , το οποίο εξαρτάται από τις ρίζες της, εφόσον βέβαια υπάρχουν.

$$\text{Ρίζες της } f: f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2$$

Η  $f$ , λοιπόν, είναι συνεχής στο διάστημα  $(-2, 2)$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή όμως  $f(a) < 0$ , το πρόσημο της  $f$  θα είναι αρνητικό στο διάστημα  $(-2, 2)$

$$\text{Άρα, από την (1) επιλέγουμε } f(x) = -\sqrt{4 - x^2} \text{ για κάθε } x \in (-2, 2) \quad (2)$$

$$\text{Για } x = -2, \text{ η υπόθεση } f^2(x) = 4 - x^2 \Rightarrow f^2(-2) = 4 - (-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(-2) = 0$$

$$\Rightarrow f(-2) = -\sqrt{4 - (-2)^2}$$

Επομένως η ισότητα  $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$  ισχύει και για  $x = -2$

Ομοίως ισχύει και για  $x = 2$ .

$$\text{Άρα } f(x) = -\sqrt{4 - x^2} \text{ για κάθε } x \in [-2, 2]$$

**20.**

Δίνεται συνάρτηση  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

- i) Είναι συνεχής
- ii)  $f(a) < 0$  για κάποιο  $a \in (1, +\infty)$
- iii)  $f^2(x) = (x-1)^2$  για κάθε  $x \in [1, +\infty)$

Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**Προτεινόμενη λύση**

$$f^2(x) = (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = x-1 \quad \text{ή} \quad f(x) = -(x-1), \text{ για κάθε } x \in [1, +\infty) \quad (1)$$

Για να επιλέξουμε από τις ισότητες της (1), χρειαζόμαστε το πρόσημο της  $f$ , το οποίο εξαρτάται από τις ρίζες της, εφόσον βέβαια υπάρχουν.

$$\text{Ρίζες της } f: f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Η  $f$ , λοιπόν, είναι συνεχής στο διάστημα  $(1, +\infty)$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή όμως  $f(a) < 0$ , το πρόσημο της  $f$  θα είναι αρνητικό στο διάστημα  $(1, +\infty)$

$$\text{Αφού } x \in (1, +\infty) \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow -(x-1) < 0$$

$$\text{Άρα, από την (1) επιλέγουμε } f(x) = -(x-1) \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty)$$

$$f(x) = -x+1 \quad \text{για κάθε } x \in (1, +\infty) \quad (2)$$

$$\text{Για } x = 1, \text{ η υπόθεση } f(x) = |x-1| \Rightarrow f(1) = |1-1| = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(1) = -1+1$$

$$\text{Επομένως η ισότητα } f(x) = -x+1 \text{ ισχύει και για } x = 1$$

$$\text{Άρα } f(x) = -x+1 \quad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty)$$

**21.**

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

i) Είναι συνεχής

ii)  $f(0) = -1$

iii)  $f^2(x) = x^2(x^2 + 4) + 2f(x) + 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**Προτεινόμενη λύση**

$$f^2(x) = x^2(x^2 + 4) + 2f(x) + 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2f(x) = x^4 + 4x^2 + 3$$

$$f^2(x) - 2f(x) + 1 = x^4 + 4x^2 + 4$$

$$[f(x) - 1]^2 = (x^2 + 2)^2$$

$$f(x) - 1 = x^2 + 2 \quad \text{ή} \quad f(x) - 1 = -(x^2 + 2)$$

$$f(x) = x^2 + 3 \quad \text{ή} \quad f(x) = -(x^2 + 1) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Για να επιλέξουμε, από τις ισότητες της (1), χρειαζόμαστε το πρόσημο της  $f$ , το οποίο εξαρτάται από τις ρίζες της, εφόσον βέβαια υπάρχουν.

Ρίζες της  $f$ :  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 0 \quad \text{ή} \quad -(x^2 + 1) = 0$  που είναι αδύνατες.

Άρα η  $f$  δεν έχει ρίζες

Η  $f$ , λοιπόν, είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή όμως  $f(0) = -1 < 0$ , το πρόσημο της  $f$  θα είναι αρνητικό.

Άρα, από την (1) επιλέγουμε  $f(x) = -(x^2 + 1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

## 22.

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

i) Είναι συνεχής

ii)  $f^2(x) - e^{2x} = 1 - 2e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  και να βρείτε τον τύπο της .

**Προτεινόμενη λύση**

$$f^2(x) - e^{2x} = 1 - 2e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = e^{2x} + 1 - 2e^x$$

$$f^2(x) = (e^x - 1)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{ή} \quad f(x) = -(e^x - 1) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

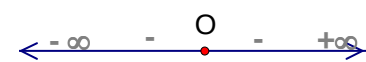
$$\text{Ρίζες της } f : f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

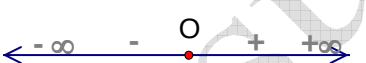
$$(e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

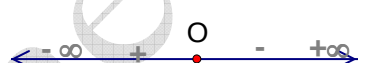
$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

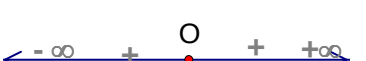
Η μοναδική ρίζα  $x = 0$  χωρίζει το πεδίο ορισμού στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ , σε καθένα των οποίων η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο μια και είναι συνεχής.

Περιπτώσεις :

•   $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ -(e^x - 1), & x > 0 \end{cases}$   
για  $x < 0$  είναι  $e^x < 1$  άρα  $e^x - 1$  αρνητικό και  
για  $x > 0$  είναι  $e^x > 1$  άρα  $e^x - 1 > 0$  δηλαδή  $-(e^x - 1)$  αρνητικό

•   $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}$

•   $f(x) = \begin{cases} -(e^x - 1), & x < 0 \\ -(e^x - 1), & x > 0 \end{cases}$

•   $f(x) = \begin{cases} -(e^x - 1), & x < 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}$

Για όλες τις περιπτώσεις είναι  $f(x) = 0$  για  $x = 0$

**23.**

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

i) Είναι συνεχής

ii)  $f(0) = 2$

iii)  $f^2(x) = 2e^x f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**Προτεινόμενη λύση**

$$f^2(x) = 2e^x f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^2(x) - 2e^x f(x) = 0$$

$$f^2(x) - 2e^x f(x) + (e^x)^2 = (e^x)^2$$

$$[f(x) - e^x]^2 = (e^x)^2$$

$$f(x) - e^x = e^x > 0 \quad \text{ή} \quad f(x) - e^x = -e^x < 0 \quad (1)$$

Η συνάρτηση, λοιπόν,  $g(x) = f(x) - e^x$  δε μηδενίζεται στο  $\mathbb{R}$  και είναι συνεχής σαν διαφορά συνεχών, άρα διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Και επειδή  $g(0) = f(0) - e^0 = 2 - 1 = 1 > 0$ ,

θα είναι  $g(x) = f(x) - e^x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα, από την (1) επιλέγουμε  $f(x) - e^x = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$f(x) = 2e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**24.**

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

- i) Είναι συνεχής  
 ii)  $f^2(x) + 2xf(x) = x^2 + x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι

- α) Η  $f$  δεν έχει ρίζες  
 β) Να βρείτε τον τύπο της  $f$

**Προτεινόμενη λύση**

α)

Έστω ότι η  $f$  έχει ρίζα  $\rho$ , δηλαδή  $f(\rho) = 0$

Η υπόθεση (ii), θέτοντας όπου  $x$  το  $\rho$ , δίνει  $f^2(\rho) + 2 \cdot \rho f(\rho) = \rho^2 + \rho + 1$

$$0 = \rho^2 + \rho + 1$$

άτοπο, αφού  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

β)

$$f^2(x) + 2xf(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = 2x^2 + x + 1$$

$$[f(x) + x]^2 = 2x^2 + x + 1 > 0, \text{ αφού } \Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$f(x) + x = \sqrt{2x^2 + x + 1} \quad \text{ή} \quad f(x) + x = -\sqrt{2x^2 + x + 1} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Η συνάρτηση, λοιπόν,  $f(x) + x$  δε μηδενίζεται στο  $\mathbb{R}$  και είναι συνεχής σαν άθροισμα συνεχών, άρα διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ , οπότε, από την (1) θα έχουμε

$$f(x) + x = \sqrt{2x^2 + x + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad f(x) + x = -\sqrt{2x^2 + x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad f(x) = -\sqrt{2x^2 + x + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**25.**

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

- i) Είναι συνεχής  
 ii)  $f^2(x) \neq 16$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
 iii)  $f(0) > 4$

Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Προτεινόμενη λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$  συνεχής (διαφορά συνεχών)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Ρίζες της } g : g(x) = 0 \Rightarrow f(x) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = 4 \Rightarrow f^2(x) = 16 \quad \text{άτοπο από υπόθεση}$$

Η συνάρτηση, λοιπόν,  $g$  δε μηδενίζεται στο  $\mathbb{R}$  και είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Επειδή όμως  $g(0) = f(0) - 4 > 0$ , το παραπάνω πρόσημο θα είναι (+)

Άρα  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .



**26.**

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν :

- i) Είναι συνεχής
- ii)  $f(x) \neq 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- iii)  $f(4) = 12$

Να αποδείξετε ότι

- α)  $f(x) > 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Προτεινόμενη λύση**

α)

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  συνεχής (διαφορά συνεχών)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ρίζες της } g : \quad g(x) = 0 &\Rightarrow f(x) - 2x = 0 \Rightarrow \\ &f(x) = 2x \quad \text{άτοπο από υπόθεση} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση, λοιπόν,  $g$  δε μηδενίζεται στο  $\mathbb{R}$  και είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Επειδή όμως  $g(4) = f(4) - 2 \cdot 4 > 0 = 12 - 8 = 4 > 0$ , το παραπάνω πρόσημο θα είναι (+)

Άρα  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β)

Για κάθε  $x > 0$  είναι  $f(x) > 2x > 0$

$$0 < 2x < f(x)$$

$$0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{2x}$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ , με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$  και

επειδή  $f(x) > 0$ , θα είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

## 4<sup>η</sup> ενότητα

### 27.

- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^7 + x + 3 = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(-2, -1)$
- ii) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 1$ , τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει  $(f(x))^7 + f(x) + x + 2 = 0$ . Να αποδείξετε ότι το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ανήκει στο διάστημα  $(-2, -1)$ .

#### Προτεινόμενη λύση

i)

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = x^7 + x + 3$ ,  $x \in [-2, -1]$ ,

η οποία προφανώς είναι συνεχής και γν. αύξουσα

$$g(-2) = (-2)^7 + (-2) + 3 = -2^7 + 1 < 0$$

$$g(-1) = (-1)^7 + (-1) + 3 = -1 + 2 = 1 > 0$$

$$\text{Άρα } g(-2)g(-1) < 0$$

Κατά το Θ. Bolzano, η συνάρτηση  $g$  θα έχει ρίζα στο διάστημα  $(-2, -1)$  και μάλιστα μοναδική αφού είναι γν. αύξουσα.

ii)

$$f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

Προσαρμογή στο (i)

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι  $f(1) \in (-2, -1)$ ,

ή ότι η τιμή  $f(1)$  είναι η ρίζα της  $g$ ,

$$\text{ή ότι } g(f(1)) = 0$$

$$\text{ή ότι } (f(1))^7 + f(1) + 3 = 0.$$

Η υπόθεση  $(f(x))^7 + f(x) + x + 2 = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , για  $x = 1$  δίνει

$$(f(1))^7 + f(1) + 1 + 2 = 0$$

$$(f(1))^7 + f(1) + 3 = 0$$

**28.**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + x - 1$ ,  $x > 0$ .

i) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^{f(x)} + \frac{\eta\mu(\pi x)}{x} - e^2 = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, 3)$ .

**Προτεινόμενη λύση**

i)

Προφανής ρίζα το  $x_0 = 1$ , αφού  $f(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0 + 0 = 0$ .

Η  $f$  είναι συνεχής και γν. αύξουσα σαν άθροισμα των  $f_1(x) = \ln x$ ,  $f_2(x) = x - 1$ , οι οποίες είναι συνεχείς και γν. αύξουσες.

Άρα η ρίζα  $x_0 = 1$  είναι μοναδική.

ii)

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^{f(x)} + \frac{\eta\mu(\pi x)}{x} - e^2$ ,  $x \in [1, 3]$ ,

η οποία είναι συνεχής, αφού προκύπτει από πράξεις συνεχών.

Οπότε αναζητάμε μία τουλάχιστον ρίζα της συνάρτησης  $g$ .

$$\text{Είναι } g(1) = e^{f(1)} + \frac{\eta\mu(\pi \cdot 1)}{1} - e^2 = e^0 + \frac{0}{1} - e^2 = 1 - e^2 < 0$$

$$\begin{aligned} g(3) &= e^{f(3)} + \frac{\eta\mu(\pi \cdot 3)}{3} - e^2 = e^{\ln 3 + 3 - 1} + \frac{0}{3} - e^2 \\ &= e^{\ln 3} e^2 - e^2 = 3 e^2 - e^2 = 2 e^2 > 0 \end{aligned}$$

Άρα  $g(1) g(3) < 0$

Κατά το Θ. Bolzano, η συνάρτηση  $g$  θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, 3)$ .

**29.**

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε να ισχύει

$$\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

i) Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  και η ευθεία  $y = x$  τέμνονται τουλάχιστον σένα σημείο με τετμημένη  $x_0 \in [0, 1]$ .

ii) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}$

Η (1) θα μας δώσει όλες τις πληροφορίες

iii) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) + \eta \mu 2x}{x^2 + \eta \mu x}$

**Προτεινόμενη λύση**

i)

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης  $f(x) - x = 0$  στο διάστημα  $[0, 1] \Leftrightarrow$  αναζητάμε ρίζα της συνάρτησης  $h(x) = f(x) - x$  στο διάστημα  $[0, 1]$ .

Είναι  $h$  συνεχής σαν διαφορά συνεχών

$$h(0) = f(0) - 0 = f(0)$$

$$(1) \xRightarrow{x=0} \frac{0^2}{2} \leq f(0) \leq \frac{0^2+1}{2} \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq h(0) \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$h(1) = f(1) - 1$$

$$(1) \xRightarrow{x=1} \frac{1^2}{2} \leq f(1) \leq \frac{1^2+1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(1) \leq 1$$

$$\frac{1}{2} - 1 \leq f(1) - 1 \leq 1 - 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq h(1) \leq 0 \quad (3)$$

Από τις (2), (3) παίρνουμε  $h(0) h(1) \leq 0$

- Όταν  $h(0) h(1) = 0$ , δηλαδή όταν  $h(0) = 0$  ή  $h(1) = 0$ ,  
Η ρίζα της  $h$  που αναζητάμε είναι  $x_0 = 0$  ή  $x_0 = 1$  αντίστοιχα.
- Όταν  $h(0) h(1) < 0$ , σύμφωνα με το Θ. Bolzano, η  $h$  θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $[0, 1]$

ii)

$$\text{Για } x \neq 0, \quad (1) \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2x^2} \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2x^2} \leq f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1+x^2}{2x^2}$$

$$\frac{1}{2} \leq x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1+x^2}{2}$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{2} = \frac{1}{2}, \text{ οπότε με το κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) + \eta \mu 2x}{x^2 + \eta \mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left[ x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\eta \mu 2x}{x} \right]}{x \left( x + \frac{\eta \mu x}{x} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \frac{\eta \mu 2x}{2x}}{x + \frac{\eta \mu x}{x}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \right] + 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x}{2x}}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}} \\
&\stackrel{(ii)}{=} \frac{\frac{1}{2} + 2 \cdot 1}{0 + 1} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

30.

Να λύσετε την εξίσωση  $4^x = 9^x \left(x + \frac{1}{6}\right)$

**Προτεινόμενη λύση**

$$\begin{aligned}
4^x = 9^x \left(x + \frac{1}{6}\right) &\Leftrightarrow \frac{4^x}{9^x} = x + \frac{1}{6} \\
\left(\frac{4}{9}\right)^x - \left(x + \frac{1}{6}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Επειδή δε δουλεύουμε σε συγκεκριμένο διάστημα, πάμε με προφανή (ή προφανείς) ρίζα και μονοτονία

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^x - \left(x + \frac{1}{6}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

«Προφανής» ρίζα το  $\frac{1}{2}$ , αφού  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} - \frac{4}{6} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0
\end{aligned}$$

Επιλέγουμε αριθμούς παρατηρώντας τη μορφή της συνάρτησης

Η  $f$  είναι άθροισμα των συναρτήσεων  $f_1(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^x$  και  $f_2(x) = -\left(x + \frac{1}{6}\right)$ ,

οι οποίες είναι συνεχείς και γν. φθίνουσες.

(Η  $f_1$  είναι εκθετική με βάση  $\frac{4}{9} < 1$  και η  $f_2$  είναι ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης  $-1 < 0$ )

Άρα η  $f$  είναι συνεχής και γν. φθίνουσα, επομένως η ρίζα  $\frac{1}{2}$  είναι μοναδική.